# ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

## 1.3. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Ν' αποδειχθεί ότι αν Α,Β,Γ.Δ.Ε είναι 5 σημεία ενός επιπέδου τέτοια ώστε: $\vec{AB}=5\vec{AB}+7\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AE}=7\vec{AB}+5\vec{A\Gamma}$ τοτε $\vec{\Delta E}\,//\,\vec{\Gamma B}$.

2. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι: $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{AZ}+\vec{B\Delta}+\vec{\Gamma E}$

3. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\vec{AE}+\vec{AZ}=\frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ένα σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε: $\vec{BM}=2\vec{M\Gamma}$, να βρεθεί το $\vec{AM}$ συναρτήσει των $\vec{AB},\vec{A\Gamma}$.

5. Έστω τρίγωνο ΟΑΒ και σημείο Γ του ΑΒ τέτοιο, ώστε $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ,ν μη αρνητικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι: $\vec{O\Gamma}=\frac{\nu\vec{OA}+\mu\vec{OB}}{\nu+\mu}$.

6. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται τα σημεία Μ και Ν τέτοια ώστε $\vec{AM}=\mu\vec{AB}$ και $\vec{\Delta N}=\nu\vec{\Delta\Gamma}$, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των μ,ν ώστε τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΓ, ΑΔ και ΜΝ να είναι συνευθειακά.

7. Αν Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $\vec{MA}+\vec{M\Gamma}=\vec{MB}+\vec{M\Delta}$.

8. Να αποδείξετε ότι για τα σημεία Α,Β :
   i. $\vec{MA}+3\vec{MB}=\vec{M\Delta}$ Χωρίζουμε τα $\vec{AB}$ ώστε $\vec{A\Delta}=3\vec{\Delta B}$
   ii. $\vec{MA}+\nu\vec{MB}=(\nu+1)\vec{M\Delta}$ Χωρίζουμε τα $\vec{AB}$ ώστε $\vec{A\Delta}=\nu\vec{\Delta B}$

9. Αν Μ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει: $\vec{AM}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{A\Gamma}$ τότε να αποδειχθεί ότι :α+β=1.

10. Αν για τα διανύσματα, $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{4}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=|\vec{\gamma}|$ να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\beta$ και $\vec{\beta}\nearrow\nearrow\vec{\gamma}$.

11. Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν 2ΚΛ=ΑΒ+ΓΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

12. Στο επίπεδο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να προσδιοριστεί σημείο Ο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Delta}$.

13. Αν για το σημείο Μ του επιπέδου ενός τρίγωνου ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{BA}$ να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

14. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α,Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{OM}=\kappa\overrightarrow{OA}+(1-\kappa)\overrightarrow{OB}$.

15. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, να βρεθεί που κινείτε το σημείο Μ όταν ισχύει η σχέση: $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{M\Gamma}+3\overrightarrow{MB}\right|$ (Βλεπε ασκ 8)

16. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΒ, ΓΔ, να αποδειχθεί ότι :
    i. . Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του
    ii. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma})$ .

17. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου αποτελούν κορυφές παραλληλογράμμου.

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Delta M}=\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}$. Να αποδειχθεί ότι τα Μ, Γ, Ν είναι συνευθειακά.

19. Αν για το σημείο Μ του επιπέδου ενός τρίγωνου ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

20. Αν Μ τυχαίο σημείο ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}$.

21. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ρ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $f(\vec{P})=2\overrightarrow{PA}-5\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{P\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του Ρ.

22. Να αποδείξετε ότι : i) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|\le\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\gamma}\right|$ ii) $\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\le\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$.

23. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha}//(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$, $\vec{\beta}//(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ .

24. Δίνετε τρίγωνο ΑΒΓ και διάνυσμα $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Αν $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=2\vec{\alpha},\overrightarrow{\mathrm{BE}}=-5\vec{\alpha},\overrightarrow{\Gamma\mathrm{Z}}=3\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BZ}}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$.

25. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και Ο το μέσο της διαμέσου. Αν η ΒΟ τέμνει την ΑΓ στο Ε να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma}=2\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

◊

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει: $\left|2\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}\right|=\left|5\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-3\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right|$

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}-\lambda\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(\lambda+1)\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}$.

28. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\beta}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$

# 1.4. ***Σ Υ Ν Τ Ε Τ Α Γ Μ Ε Ν Ε Σ  Σ Τ Ο Ε Π Ι Π Ε Δ Ο***

29. Στο επίπεδο χΟy δίνονται τα σημεία Α(3,0) και Β(4,2) να υπολογιστεί η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ.

30. Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(4,-5). Να βρεθούν τα σημεία Μ,Ν τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{NB}$.

31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (7,6)$, $\vec{\beta} = (2,1)$ και $\vec{\gamma} = (3,4)$.
.Να εξετάσετε εάν το $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.
   i. Το ίδιο να γίνει για τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-5,4)$, $\vec{\beta} = (3,-9)$, $\vec{\beta} = (2,-6)$.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(0,4), B(-2,0), \Gamma(5,0)$. Σημείο Σ της ΒΓ τέτοιο ώστε $3\overrightarrow{B\Gamma} - 4\overrightarrow{\Sigma\Gamma} = \vec{0}$. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Sigma}$ κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Ποιες είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Sigma}$.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(2,3), B(1,1), \Gamma(5,2)$.
   i. Να υπολογιστούν οι συντελεστές διεύθυνσης των πλευρών του τριγώνου.
   ii. Να υπολογιστεί το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

34. Αν $\vec{a} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (3,-7), \vec{\gamma} = (-2,5)$. Να βρεθούν τα διανύσματα: $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$.

35. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3,-4)$. Να βρεθεί διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ που να έχει μέτρο 3.

36. Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία Α(-5,-2), Β(3,-1) και Γ(11,0) είναι συνευθειακά και να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των σημείων Ρ και Σ για τα οποία ισχύουν $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PB}$ και $\overrightarrow{A\Sigma} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{\Sigma B}$

37. Να εξετάσετε εάν τα σημεία με συντεταγμένες: $M_1(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$, $M_3(\alpha+2\beta, 2\alpha-\beta)$ είναι συνευθειακά.

38. Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ, είναι συνευθειακά.

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε, Ζ ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.
    i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ , $\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.
    ii. να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

40. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) Β(7,-4). Να βρεθεί σημείο Μ του χχ΄ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή Μ.

41. Να βρεθεί το διάνυσα $\vec{a} = (-4, |\vec{a}| - 2)$.

42. Να υπολογιστούν τα διανύσματα: $\vec{a} = (-3, |\vec{\beta}|)$ και $\vec{\beta} = (1 - |\vec{\alpha}|, \sqrt{2})$.

43. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσα στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = (-3, 4)$.

44. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ με συντεταγμένες των κορυφών Α(-2,1) και Γ(0,5) να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού.

45. Δίνονται τα σημεία $A(0, 3-\sqrt{2})$, $B(x, 3)$ και $\Gamma(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ να υπολογιστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού x ώστε τα σημεία Α,Β,Γ να είναι συνευθειακά.

46. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (5\kappa, 3-\lambda)$, $\vec{\beta} = (4-\lambda, 4\kappa)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
    i. Για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ίσα.
    ii. Αν $\lambda = 8$, και $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, τότε να προσδιοριστεί η θετική τιμή του $\kappa$.

47. Να αποδειχθεί ότι: $\det(\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \det(\vec{a}, \vec{\gamma}) + \det(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$.

48. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής διεύθυνσης (εάν υπάρχει) και η γωνία του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ με τον άξονα xx΄ όταν:
    i. Α(-1, 3) και Β(2, -3)
    ii. Α(-2, 7) και Β(-2, 7)
    iii. Α(3, 0) και Β(0, -$\sqrt{3}$)
    iv. Α(1, 5) και Β(-2, 5)
    v. Α(2,1) και Β(1, 1+$\sqrt{3}$)
    vi. Α(0,3) και Β(-2,3).

49. Ποια είναι η γωνιά που σχηματίζει το διάνυσα $\vec{a} = (-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ με τον άξονα χχ΄.

50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(2,\ 2)$ και $\vec{\beta}=(1,\ -\sqrt{3})$.
    i. Να βρεθεί η γωνία του $\vec{a}$ με τον άξονα xx΄.
    ii. Να βρεθεί η γωνία του $\vec{\beta}$ με τον άξονα xx΄.
    iii. Να βρεθεί η γωνία $\left(\vec{a},\vec{\beta}\right)$.

51. Δίνονται τα σημεία Α(-1, 0) Β(2, -3) και Γ(0, 1). Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{v}$ , για το οποίο ισχύει: $2\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\left|\vec{v}\right|\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ .

52. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(4,-2)$. Να βρείτε:
    i. $\left|-3\vec{\alpha}\right|$
    ii. $\left|-\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|$.

53. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ \kappa-1)$, $\vec{\beta}=(\kappa-1,\ 9)$ να προσδιοριστεί η τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε: $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$.

54. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,\ 4)$ να προσδιοριστεί το διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $\sqrt{17}$ .

55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-1)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$ και $\vec{\gamma}=(12,-5)$.
    i. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμικά.
    ii. Να εκφράσετε το διανύσματα $\vec{\gamma}$ να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$.

56. Έστω τα σημεία Α(3x, y) και Β(4x+3y, 2y) να προσδιοριστούν οι πραγματικές τιμές των x, y ώστε η γωνία του $\overrightarrow{AB}$ με τον xx΄ να είναι $135^o$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$.

57. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1-\lambda,\ \kappa)$, $\vec{\beta}=(-\kappa,\ 2-2\lambda)$ και $\vec{\gamma}=(1,\ 5)$ Να προσδιοριστούν οι τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

58. Δίνονται τα σημεία Α(1, 2) Β(κ, 0) και Γ(0,-κ) $\kappa\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τη τιμή του κ, ώστε $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$.

59. Έστω $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-2(\lambda-1)x-\lambda+1=0$. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε τα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

60. Δίνονται τα σημεία Α(-1, 2) Β(1,-2) και Γ(2, 3). Να προσδιοριστεί το σημείο Μ του άξονα yy΄ ώστε η $d=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}\right|^2$ να γίνεται ελάχιστη,

61. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(-1, 2) Β(1, 3) και Γ(0,2) και Δ. Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ οι συντεταγμένες του κέντρου Ο και το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

62. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(1, 2) και Β(-1, 0) και κέντρο Κ(0, 3). Να προσδιοριστούν:
   i. Οι κορυφές Γ, Δ.
   ii. Το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

63. Σε τρίγωνο με κορυφές Α(-1,3) Β(-2, -3) και Γ(2, 4). Να προσδιοριστούν:
   i. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.
   ii. Το $\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|$.

64. Δίνονται τα σημεία Α(0, 1) Β(-2, 0) και Γ(1, 3).
   i. Να δειχθεί ότι τα Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
   ii. Να προσδιοριστεί το σημείο Δ του επιπέδου ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

65. Τα σημεία Α, Β, Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το Ο τα $\vec{\alpha}=(-1,\ 3)$, $\vec{\beta}=(3,\ 5)$, $\vec{\gamma}=(-3,\ 2)$αντίστοιχα
   i. Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.
   ii. Να δειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
   iii. Ποια είναι η σχετική θέση των Α, Β, Γ;

66. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1, 2) Β(7, 0) και Γ(1, 4). Αν Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ και για το σημείο Ε ισχύει: $2\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}}$
   i. Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες των σημείων Δ , Ε.
   ii. Να δειχθεί ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

67. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0, 4) Β(-2, -1), Γ(3, 0), το σημείο Ρ(1,2) και έστω Δ, Ε,Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ με τις ευθείες ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\mu\cdot\overrightarrow{\mathrm{P\Delta}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}=\nu\cdot\overrightarrow{\mathrm{ZB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\rho\cdot\overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}}$ τότε να δειχθεί ότι: μ=ν+ρ

# 1.5. ***Ε Σ Ω Τ Ε Ρ Ι Κ Ο   Γ Ι Ν Ο Μ Ε Ν Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ***

### ◊ Ορισμός

68. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$, να υπολογιστούν:
    i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
    ii. $\left(2\vec{a}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{\beta}\right)$
    iii. $\left(2\vec{a}-3\vec{\beta}\right)^2$.

69. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν, $\left|\vec{\alpha}\right|=4$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$ $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{2}$, να υπολογιστεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}$

70. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν, $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=1$ $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$, να υπολογιστούν:
    i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
    ii. Το $\left|\vec{v}\right|,\left|\vec{u}\right|$ με $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$
    iii. Το $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{v},\vec{u}\right)$

71. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\right|=4$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\left|\vec{\gamma}\right|=1$ και $\overrightarrow{2\alpha}+\vec{\beta}-6\vec{\gamma}=\vec{0}$.
    i. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$.
    ii. Τις γωνιές των διανυσμάτων: $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma},\vec{\beta}$.
    iii. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}=4\vec{\gamma}$.

72. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=\frac{1}{2}$, $\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να υπολογιστούν:
    i. $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$.
    ii. $\left(\vec{\alpha},\vec{\gamma}\right)$.
    iii. $\left|\vec{\gamma}\right|$.

73. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$ $\left|\vec{\alpha}\right|=3$, $\left|\vec{\beta}\right|=5$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=7$. Να υπολογιστεί η $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$.

### ◊ Αναλυτική Έκφραση

74. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ $\vec{\beta}=(2,4)$. Να υπολογιστούν:
    i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
    ii. $(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})$.
    iii. $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2$
    iv. $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$.

75. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(2,-3)$, $\vec{v}=(1,1)$. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:
    i. $\vec{v}\cdot\vec{u}$.
    ii. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$.
    iii. $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)$.

76. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{v}=(1,1)$. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}-2\vec{v}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=3\vec{u}+\vec{v}$. Να υπολογιστεί το $\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|$.

77. Να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όταν:
    i. $\vec{\alpha}=(1,\sqrt{3})$, $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},3)$

78. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-3)$ $\vec{\beta}=(-2,7)$. Να υπολογιστεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ώστε: $\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\alpha}^2=\vec{\gamma}^2$

79. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1)$ $\vec{\beta}=(1,1)$, επίσης ισχύει: $2\vec{v}+\vec{u}=\vec{\beta}$ και $\vec{v}+2\vec{u}=\vec{\alpha}$ . Να υπολογιστούν:
    i. Τα $\vec{v},\ \vec{u}$
    ii. Το $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{v},\ \vec{u}\right)$

80. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(4,\ 1)$, $\mathrm{B}(8,\ 2)$, και $\Gamma(1,\ 3)$. Να δειχθεί ότι η γωνία των διανυσμάτων $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)$είναι αμβλεία.

### ◊ Υπολογιστικές

81. i) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$, $\vec{\beta}=(0,3)$. Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$.

ii) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$ Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $(\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta})$.

82. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$ και $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{34}$. Να υπολογιστούν τα μέτρα των μιγαδικών $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

83. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{u}\right)=\frac{\pi}{3}$. να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

84. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ να βρεθεί η γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$.

85. Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(2,0)$ και $\vec{w}=(6,-3)$. Να βρεθεί διανύσματα $\vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v}+\vec{\alpha}=\vec{w}$.

86. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-4,3)$, $\vec{v}=(5,12)$. Να βρεθεί διανύσματα $\vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύει: $\vec{\alpha}^2=37$, $\vec{\alpha}\perp\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)$.

87. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(1,-2)$ και $\vec{\gamma}=(4,-3)$. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{v}$, $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ όπου $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$.

88. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{A}(7,\ -4)$, να βρεθεί σημείο Μ του χχ' ώστε: $\mathrm{AMB}=\frac{\pi}{2}$.

89. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ \lambda+2)$ και $\Gamma(\lambda^2-2,\ 3)$.
   i. Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού $\lambda$ ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο στο Α.
   ii. Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda$ που βρέθηκε, να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. .

90. Δίνονται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{3}$ και η εξίσωση $\left|\vec{\alpha}+x\cdot\vec{\beta}\right|=1$ έχει διπλή ρίζα, να βρεθεί η γωνία $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$.

91. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\cdot\left(\vec{\beta}^2-1\right)$. Να βρεθεί η τιμή του $x\in\mathbb{R}$: $\left|x\vec{a}+\vec{\beta}\right|=1$

92. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|\le 5$, $|\vec{\beta}|\le 15$, $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\ge 20$.
    i. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.
    ii. Να δειχθεί ότι $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$.

93. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$, $\vec{\alpha}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(3,5)$ να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε να ισχύει η σχέση: $\left(\vec{v}\cdot\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}+2\vec{v}=\vec{\gamma}$.

94. Αν ισχύει $\left(\vec{x}\cdot\vec{\alpha}\right)\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1\neq 0$. Να δειχθεί ότι:
    i. $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$.
    ii. $\vec{x}=\vec{\gamma}-\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\vec{\beta}$

◊ **Αποδεικτικές**

95. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},$ ισχύει$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ και $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\vec{\alpha}$ Να δειχθεί ότι $\vec{\beta}=-\vec{\alpha}$ :

96. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. Να αποδειχθεί η καθετότητα των διανυσμάτων.
    a. Το $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}-\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})$ με το $\vec{\alpha}$.
    b. Το $\dfrac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}-\vec{\alpha}$ με το $\vec{\alpha}$
    c. Το $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ με το $\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}-\dfrac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$.

97. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},$ ποτέ ισχύει η σχέση: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.

98. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει: $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=7$. Να δειχθεί ότι:
    i. $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}$.
    ii. $\vec{\beta}=\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}$.

99. Αν για να διανύσματα με μέτρα $|\vec{\alpha}|=\sqrt{8}$, $|\vec{\beta}|=2$ και υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ με $|x\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2x\vec{\beta}|$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

100. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{u},\vec{v}$ για τα οποία ισχύει: $\vec{u}^2\cdot\vec{v}=\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{u}$. Να δειχθεί ότι $\vec{u}//\vec{v}$.

101. Για τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ ισχύει: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|<\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$. Να δειχθεί ότι η γωνία $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ είναι αμβλεία.

102. Για τα συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|}+\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\gamma}\right|}+\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\gamma}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|}=-1$. Να δειχθεί ότι δεν είναι όλα ομόρροπα μεταξύ τους.

103. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=\dfrac{\left|\vec{\beta}\right|}{2}=\dfrac{\left|\vec{\gamma}\right|}{3}$.
Να δειχθεί ότι:
i. $\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$.
ii. $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}$.

104. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει : $\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}+\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\gamma}\right|}+\dfrac{\vec{\gamma}\vec{\beta}}{\left|\vec{\gamma}\right|\left|\vec{\beta}\right|}=3$ τότε να δειχθεί ότι αυτά είναι ομόρροπα.

105. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=1$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{3}$ με $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Να δειχθεί ότι:
i. $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\beta}\vec{\gamma}=2$.
ii. $\left(\vec{\alpha},\vec{\gamma}\right)=3\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)$

106. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει : $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=\dfrac{\left|\vec{\gamma}\right|}{2}$.
Να δειχθεί ότι: $\vec{\alpha}\perp\left(\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)$.

### ◊ Γεωμετρικοί Τόποι

107. Δίνονται δυο σταθερά σημεία Α και Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει: $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2}$.

108. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ του επιπέδου, επίσης ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$. Να δειχθεί ότι το Μ κινείται σε ευθεία.

109. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}\cdot\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$.

110. Έστω σημεία Α, Β με (ΑΒ)=2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=5$.

111. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ)=6. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}=7+\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

### ◊ **Προβολή**

112. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει $|\vec{\alpha}|=3$ και $|\vec{\beta}|=4$, με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

113. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, ισχύει $|\vec{\alpha}|=\dfrac{1}{2}$ και $|\vec{\beta}|=2$, με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ . Να δειχθεί ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=2\vec{\alpha}$

114. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}=(3,4)$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}=(-1,\ 5)$

115. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,\ -3)$ και $\vec{\beta}=(1,\ -2)$.
   i. Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.
   ii. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες όπου η μια θα είναι παράλληλη $\vec{\beta}$.

116. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,7)$ σε δυο συνιστώσες όπου η μια θα είναι παράλληλη και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}=(1,-3)$

117. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(2-|\vec{\alpha}|,\ \ |\vec{\alpha}|-1\right)$ $|\vec{\alpha}|\neq 1$ και $\vec{\beta}=(2,\ 1)$.
   i. Να υπολογιστεί το $|\vec{\alpha}|$.
   ii. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, είναι μη συγγραμικά.
   iii. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες όπου η μια θα είναι παράλληλη και η άλλη κάθετη στο $\vec{\beta}$

118. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ)=3, (ΑΓ)=4 και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=120^o$. Αν ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου να υπολογιστεί η $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

119. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}$ ισχύουν: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1=0$ και $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)\cdot\vec{x}=2\pi\rho o\beta_{\vec{a}}\vec{x}+\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι: $\vec{x}=2\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}+\vec{\beta}$.

120. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ ισχύει: $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=(3,\ 2)$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=(2,\ \text{-}3)$.

i. Να δειχθεί ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

ii. Να υπολογιστεί η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$..

121. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ ισχύει: $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\frac{1}{4}\vec{\alpha}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$. Να υπολογιστεί η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

122. Για τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ όπου $\vec{u}\neq\vec{v}$ και $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$. Να αποδειχθεί ότι: $\pi\rho o\beta_{\vec{u}-\vec{v}}\vec{u}+\pi\rho o\beta_{\vec{u}-\vec{v}}\vec{v}=\vec{0}$.

123. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $\vec{\beta}+4\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=0$ και $2\vec{\alpha}+\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=0$

i. Να δειχθεί ότι: $\left|\vec{\beta}\right|=2\sqrt{2}\left|\vec{\alpha}\right|$.

ii. Να υπολογιστεί η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

## ◊ Ευκλείδεια Γεωμετρία

124. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΔ, ΓΕ τα δυο ύψη του να αποδειχθεί ότι:

i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

ii. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.

125. Να δειχθεί ότι η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

126. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90$^o$) και ΑΔ το ύψος του τριγώνου. Να αποδειχθούν οι μετρικές σχέσεις του τριγώνου:

i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$.

ii. $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

iii. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}^2$.

127. Σε τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να δειχθεί ότι:

i. $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2=2\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{MB}^2$.

ii. $\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{A\Gamma}^2=2\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{AM}$

128. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^o$ και το ύψος του ΑΔ. Να δειχθεί ότι: $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

129. Σε τρίγωνο ΑΒΓ και ύψος ΑΔ και ισχύει ότι: $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Να δειχθεί ότι $A=90^o$.

130. Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι: $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma Z}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

131. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με AB=ΑΓ, ΑΜ η διάμεσος του, Δ η προβολή του Μ στην ΑΓ, αν Κ είναι το μέσο του ΜΔ. Να δειχθεί ότι: $AK\perp B\Delta$ .

### ◊ **Διάφορες Συνδυαστικές**

132. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις προτάσεις;

i. $\dfrac{\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$.

ii. $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}=\dfrac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}}$.

133. Δίνονται τα μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2$.

i. Να δειχθεί ότι: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2\le\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$.

ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^2-2\left|\vec{a}-\vec{\beta}\right|x+\left(1-\vec{a}\vec{\beta}\right)^2=0$.

134. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$ και $2\vec{\alpha}+\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=0$.

i. Να υπολογιστεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

ii. Να υπολογιστεί διάνυσμα $\vec{u}$ με $\vec{u}//\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{a}\perp\left(\vec{u}-2\vec{\beta}\right)$.

iii. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=120^o$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$. Να βρεθεί:

a. $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

b. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$.